

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I, 1. DIO - GRUPA A 27. siječnja 2012.

1.
 - (i) Napišite formulu za linearnu aproksimaciju funkcije f oko x_0 .
 - (ii) Napišite formule za kvadratnu i kubnu aproksimaciju funkcije f oko x_0 .
 - (iii) Odredite linearnu, kvadratnu i kubnu aproksimaciju funkcije $f(x) = \ln x$ oko $x_0 = 1$.
 - (iv) Koristeći se formulama iz (iii) približno odredite $\ln 1.2$.
2.
 - (i) Crtežom predočite lokalne ekstreme.
 - (ii) Napišite nužan uvjet za lokalni ekstrem funkcije f pomoću derivacija i objasnite ga geometrijski.
 - (iii) Crtežom predočite sve mogućnosti za točke infleksije.
 - (iv) Označite na grafu funkcije $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ sve lokalne ekstreme i točke infleksije koje se nalaze unutar intervala $< 0, 2\pi >$.
3.
 - (i) Napišite formulu kojom se definira derivacija funkcije f u x_0 .
 - (ii) Koristeći formulu za derivaciju funkcije u točki izvedite derivaciju funkcije $f(x) = (x + 1)^3$.
 - (iii) Geometrijski predočite tangentu na graf funkcije $f(x) = (x + 1)^3$ u točki s prvom koordinatom $x_0 = -2$ (precizna slika)!
 - (iv) Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = (x + 1)^3$ u točki s prvom koordinatom $x_0 = -2$.
4.
 - (i) Napišite formulu za derivaciju kvocijenta dviju funkcija.
 - (ii) Derivirajte funkciju $f(x) = \frac{2x}{\log_2 x}$.
 - (iii) Napišite formulu za derivaciju složene funkcije (kompozicija funkcija).
 - (iv) Derivirajte funkciju $f(x) = \sqrt{2 - \sin x}$.
5. Predočite crtežom i zapišite uvjete preko derivacija:
 - (i) ubrzani pad,
 - (ii) usporeni pad,
 - (iii) usporeni rast,
 - (iv) ubrzani rast.

U svakom podzadatku napišite je li funkcija konveksna ili konkavna.

NAPOMENA: Svaki podzadatak nosi po jedan bod.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I, 1. DIO - GRUPA B 27. siječnja 2012.

1. Predočite crtežom i zapišite uvjete preko derivacija:

- (i) usporeni rast,
- (ii) ubrzani pad,
- (iii) usporeni pad,
- (iv) ubrzani rast.

U svakom podzadatku napišite je li funkcija konveksna ili konkavna.

2. (i) Crtežom predočite lokalne ekstreme.
(ii) Napišite nužan uvjet za lokalni ekstrem funkcije f pomoću derivacija i objasnite ga geometrijski.
(iii) Crtežom predočite sve mogućnosti za točke infleksije.
(iv) Označite na grafu funkcije $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ sve lokalne ekstreme i točke infleksije koje se nalaze unutar intervala $\langle 0, 2\pi \rangle$.
3. (i) Napišite formulu za linearnu aproksimaciju funkcije f oko x_0 .
(ii) Napišite formule za kvadratnu i kubnu aproksimaciju funkcije f oko x_0 .
(iii) Odredite linearnu, kvadratnu i kubnu aproksimaciju funkcije $f(x) = \ln x$ oko $x_0 = 1$.
(iv) Koristeći se formulama iz (iii) približno odredite $\ln 0.9$.
4. (i) Napišite formulu za derivaciju kvocijenta dviju funkcija.
(ii) Derivirajte funkciju $f(x) = \frac{3x}{\log_3 x}$.
(iii) Napišite formulu za derivaciju složene funkcije (kompozicija funkcija).
(iv) Derivirajte funkciju $f(x) = \sqrt{3 + \cos x}$.
5. (i) Napišite formulu kojom se definira derivacija funkcije f u x_0 .
(ii) Koristeći formulu za derivaciju funkcije u točki izvedite derivaciju funkcije $f(x) = (x - 1)^3$.
(iii) Geometrijski predočite tangentu na graf funkcije $f(x) = (x - 1)^3$ u točki s prvom koordinatom $x_0 = 0$ (precizna slika)!
(iv) Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = (x - 1)^3$ u točki s prvom koordinatom $x_0 = 0$.

NAPOMENA: Svaki podzadatak nosi po jedan bod.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I, 1. DIO - GRUPA C 27. siječnja 2012.

1.
 - (i) Napišite formulu za derivaciju kvocijenta dviju funkcija.
 - (ii) Derivirajte funkciju $f(x) = \frac{4x}{\log_4 x}$.
 - (iii) Napišite formulu za derivaciju složene funkcije (kompozicija funkcija).
 - (iv) Derivirajte funkciju $f(x) = \sqrt{4 - \sin x}$.
2.
 - (i) Napišite formulu za linearnu aproksimaciju funkcije f oko x_0 .
 - (ii) Napišite formule za kvadratnu i kubnu aproksimaciju funkcije f oko x_0 .
 - (iii) Odredite linearnu, kvadratnu i kubnu aproksimaciju funkcije $f(x) = \ln x$ oko $x_0 = 1$.
 - (iv) Koristeći se formulama iz (iii) približno odredite $\ln 1.1$.
3.
 - (i) Crtežom predočite lokalne ekstreme.
 - (ii) Napišite nužan uvjet za lokalni ekstrem funkcije f pomoću derivacija i objasnite ga geometrijski.
 - (iii) Crtežom predočite sve mogućnosti za točke infleksije.
 - (iv) Označite na grafu funkcije $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ sve lokalne ekstreme i točke infleksije koje se nalaze unutar intervala $\langle 0, 2\pi \rangle$.
4.
 - (i) Napišite formulu kojom se definira derivacija funkcije f u x_0 .
 - (ii) Koristeći formulu za derivaciju funkcije u točki izvedite derivaciju funkcije $f(x) = (x + 2)^3$.
 - (iii) Geometrijski predočite tangentu na graf funkcije $f(x) = (x + 2)^3$ u točki s prvom koordinatom $x_0 = -3$ (precizna slika)!
 - (iv) Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = (x + 2)^3$ u točki s prvom koordinatom $x_0 = -3$.
5. Predočite crtežom i zapišite uvjete preko derivacija:
 - (i) usporeni pad,
 - (ii) ubrzani rast,
 - (iii) ubrzani pad,
 - (iv) usporeni rast.

U svakom podzadatku napišite je li funkcija konveksna ili konkavna.

NAPOMENA: Svaki podzadatak nosi po jedan bod.

1. (i) Pokažite da funkcija $y = xe^{x+1}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.
(2 boda)
- (ii) Izračunajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+7}{x(2x-1)^2}$. (1 bod)
- (iii) Izračunajte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-x-2}$. (1 bod)
2. (i) Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ u točki $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$. (2 boda)
- (ii) Koristeći linearnu aproksimaciju, približno izračunajte vrijednost izraza $\sqrt[3]{6 + \sqrt{3.9}}$.
(2 boda)
3. (a) Funkciju $f(x) = e^{-2x}$ razvijte u Taylorov red oko točke $x_0 = 0$
 - (i) izravno iz definicije Taylorovog reda (određivanjem n-te derivacije funkcije)
(2 boda)
 - (ii) koristeći razvoj funkcije $f(x) = e^x$ u Taylorov red oko točke $x_0 = 0$.
(1 bod)
- (b) Izračunajte $f^{(100)}(0)$. (1 bod)
4. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$. Odredite:
 - (i) domenu funkcije (1 bod)
 - (ii) njene nultočke (1 bod)
 - (iii) asimptote (horizontalne, kose, vertikalne) (1 bod)
 - (iv) lokalne ekstreme (1 bod)
 - (v) intervale rasta i pada (1 bod)
 - (vi) intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije. (1 bod)
 - (vii) Nacrtajte precizno graf te funkcije koristeći gornje podatke. (2 boda)

1. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{x^2+5}{x-2}$. Odredite:
 - (i) domenu funkcije (1 bod)
 - (ii) njene nultočke (1 bod)
 - (iii) asimptote (horizontalne, kose, vertikalne) (1 bod)
 - (iv) lokalne ekstreme (1 bod)
 - (v) intervale rasta i pada (1 bod)
 - (vi) intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije. (1 bod)
 - (vii) Nacrtajte precizno graf te funkcije koristeći gornje podatke. (2 boda)
2. (i) Pokažite da funkcija $y = -\frac{1}{\ln x}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $xy' = y^2$.
(2 boda)
- (ii) Izračunajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4+21}{x(x-2)^3}$. (1 bod)
- (iii) Izračunajte $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2+3x+2}$. (1 bod)
3. (i) Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ u točki $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$.
(2 boda)
- (ii) Koristeći linearnu aproksimaciju, približno izračunajte vrijednost izraza $\sqrt[3]{4 + \sqrt{16.2}}$.
(2 boda)
4. (a) Funkciju $f(x) = e^{-3x}$ razvijte u Taylorov red oko točke $x_0 = 0$
 - (i) izravno iz definicije Taylorovog reda (određivanjem n-te derivacije funkcije)
(2 boda)
 - (ii) koristeći razvoj funkcije $f(x) = e^x$ u Taylorov red oko točke $x_0 = 0$.
(1 bod)
- (b) Izračunajte $f^{(200)}(0)$. (1 bod)

1. (i) Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$ u točki $(0, f(0))$. (2 boda)
(ii) Koristeći linearnu aproksimaciju, približno izračunajte vrijednost izraza $\sqrt[3]{5 + \sqrt{9.1}}$. (2 boda)
2. (a) Funkciju $f(x) = e^{-5x}$ razvijte u Taylorov red oko točke $x_0 = 0$
 - (i) izravno iz definicije Taylorovog reda (određivanjem n-te derivacije funkcije) (2 boda)
 - (ii) koristeći razvoj funkcije $f(x) = e^x$ oko točke $x_0 = 0$. (1 bod)(b) Izračunajte $f^{(300)}(0)$. (1 bod)
3. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{x^2+7}{x-3}$. Odredite:
 - (i) domenu funkcije (1 bod)
 - (ii) njene nultočke (1 bod)
 - (iii) asimptote (horizontalne, kose, vertikalne) (1 bod)
 - (iv) lokalne ekstreme (1 bod)
 - (v) intervale rasta i pada (1 bod)
 - (vi) intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije. (1 bod)
 - (vii) Nacrtajte precizno graf te funkcije koristeći gornje podatke. (2 boda)
4. (i) Pokažite da funkcija $y = -\frac{1}{\operatorname{arctg} x}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $(1+x^2)y' = y^2$. (2 boda)
(ii) Izračunajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3x}{(3x+1)^2}$. (1 bod)
(iii) Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-3x+2}$. (1 bod)